ГЛАВА 7

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

Теория колебаний механических систем — один из самых обширных и развитых разделов теоретической механики, имеющий большое прикладное значение.

Колебательные движения встречаются во многих отраслях современной науки и техники и требуют для рассмотрения широкого использования различных математических методов.

Рассмотрим основные свойства малых колебаний механических систем с одной и двумя степенями свободы на основе применения уравнений Лагранжа; некоторые результаты для системы с любым конечным числом степеней свободы приведем без вывода. Механическая система может совершать малые колебания только вблизи устойчивого положения равновесия. Обобщенные координаты системы в положении равновесия принимают равными нулю, т. е. отсчитывают их от положения равновесия. Тогда *колебательным движением* механической системы в общем случае считают всякое ее движение, при котором все обобщенные координаты или часть из них изменяются не монотонно, а имеют колебательный характер, т. е. принимают нулевые значения по крайней мере несколько раз.

Ниже рассмотрены только периодические и псевдопериодические колебания.

Для рассмотрения малых колебаний следует дать определение устойчивости положения равновесия системы и установить условия, при выполнении которых положение равновесия является устойчивым.

§ 1. УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Определение устойчивости положения равновесия

Для наглядности рассмотрим положение равновесия на примере одного твердого тела. Пусть таким телом является стержень (рис. 107, *а, б, в*) с горизонтальной осью вращения, проходящей через точку O. Стержень имеет два положения равновесия при $\varphi=0°$ и $\varphi=180°$. В положении равновесия силы, приложенные к стержню, составляют уравновешенную систему сил.

Чтобы установить, будет ли рассматриваемое положение равновесия стержня устойчивым, следует дать стержню достаточно малое начальное отклонение от положения равновесия, а в общем случае сообщить ему еще достаточно малую начальную угловую скорость и рассмотреть его последующее движение. Для простоты ограничимся только одним малым начальным отклонением от положения равновесия. В отклоненном положении силы,

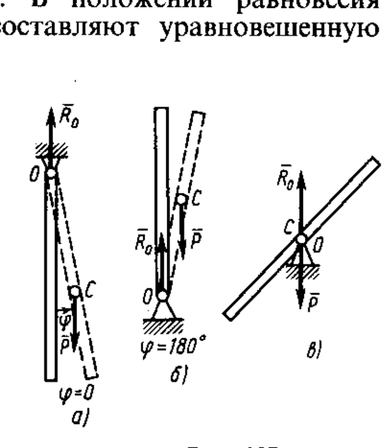

Рис. 107

вующие на стержень (сила тяжести и реакция в точке уже не являются уравновешенными.

Если существует такое достаточно малое начальное отклонение стержня от положения равновесия, при котором силы стремятся вернуть стержень в положение равновесия, то такое положение равновесия считается *устойчивым*.

Положение равновесия стержня при $\varphi=0°$ (рис. 107, *а*) является устойчивым, так как при начальном его отклонении на малый угол силы, действующие на стержень, стремятся вернуть его в положение равновесия.

В том случае, когда силы еще дальше отклоняют стержень от положения равновесия, положение равновесия является *неустойчивым*.

Положение равновесия стержня при $\varphi=180°$ может служить примером неустойчивого положения равновесия (рис. 107, *б*). Силы, действующие на стержень, в этом случае стремятся отклонить его еще дальше от положения равновесия при любом как угодно малом начальном его отклонении от положения равновесия.

Если стержень, получив любое малое начальное отклонение от положения равновесия, остается в равновесии в новом отклоненном положении, то такое положение равновесия называется *безразличным*.

Примером безразличного положения равновесия может служить равновесие стержня, у которого закрепленная точка O совпадает с центром масс C. В этом случае силы, приложенные к стержню, образуют равновесную систему сил при любом начальном его отклонении от первоначального положения равновесия (рис. 107, *в*).

В общем случае кроме начального отклонения стержню следует сообщить также еще и некоторую достаточно малую начальную угловую скорость. Естественно, что тогда случай безразличного положения равновесия стержня следует отнести к неустойчивому положению равновесия, так как, получив любую малую начальную угловую скорость, стержень дальше будет удаляться с этой угловой скоростью по инерции от своего первоначального положения равновесия.

Все изложенное о положении равновесия стержня характерно не только для любого твердого тела, но и для любой механической системы. Наибольший интерес представляет устойчивое положение равновесия тела или механической системы, так как в таком положении равновесия тело или система могут находиться длительно, если им не сообщается какое-либо возмущение.

При устойчивом положении равновесия система, выведенная из положения равновесия достаточно малыми возмущениями в виде начальных отклонений и скоростей, которые сообщаются всем точкам системы или их части, совершает колебания около положения равновесия или приближается к нему без колебаний.

При неустойчивом положении равновесия случайные возмущения приводят к тому, что система при дальнейшем движении

все дальше отклоняется от положения равновесия. Таким образом, прежде всего необходимо установить характер положения равновесия системы. Для этого требуется ввести точное понятие устойчивости положения равновесия системы.

Строгое определение понятия устойчивости положения равновесия было дано в конце прошлого века в работах русского ученого А. М. Ляпунова. Приведем это определение для системы с любым конечным числом степеней свободы n.

Условимся обобщенные координаты $q_1, q_2, ..., q_n$ отсчитывать от положения равновесия системы, т. е. принимать их равными нулю в положении равновесия. Начальное возмущение системы состоит в общем случае из начальных значений обобщенных координат $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n$ и начальных обобщенных скоростей $\dot{q}_1^0, \dot{q}_2^0, ..., \dot{q}_n^0$.

По Ляпунову, *равновесие системы называется устойчивым, если для любого достаточно малого* $\varepsilon>0$ *можно выбрать два других таких малых числа* $\eta_1>0$ *и* $\eta_2>0$, *что при удовлетворении начальными значениями обобщенных координат и скоростей неравенств* $|q_i^0|<\eta_1$, $|\dot{q}_i^0|<\eta_2$ *в любой момент времени все обобщенные координаты подчиняются условиям* $|q_i(t)|<\varepsilon$.

Таким образом, по Ляпунову, положение равновесия считается устойчивым, если можно задать достаточно малую область изменения начальных значений обобщенных координат в окрестности положения равновесия и область начальных обобщенных скоростей, для которых величины обобщенных координат при последующем движении системы ограничены заданной ε окрестностью вблизи положения равновесия. Ясно, что области начальных значений q_i^0 и $\dot{q}_i^0$, определяемые положительными числами η_1 и η_2, зависят от выбранной ε-окрестности, т. е. самого числа ε. Эти области начальных значений q_i^0 и $\dot{q}_i^0$ не должны соответствовать $\eta_1=0$ и $\eta_2=0$, т. е. только самому положению равновесия, для которого $q_i^0=0$ и $\dot{q}_i^0=0$.

В положении равновесия механической системы каждая обобщенная сила Q_i равна нулю. Для случая потенциального силового поля обобщенные силы через потенциальную энергию вычисляются по формулам

$$Q_i=-\partial\Pi/\partial q_i, \quad i=1, 2, ..., n.$$

Следовательно, в положении любого равновесия $\partial\Pi/\partial q_i=0$, поэтому потенциальная энергия при этом может достигать своего экстремального значения.

Теорема Лагранжа — Дирихле

Малые колебания системы могут длительно совершаться только в окрестности устойчивого положения равновесия системы. Поэтому важное значение имеет теорема Лагранжа — Дирихле, устанавливающая достаточные условия

устойчивости положения равновесия системы. Теорема утверждает: *для устойчивости положения равновесия системы, подчиненной голономным, идеальным, стационарным и неосвобождающим связям и находящейся в стационарном потенциальном силовом поле, достаточно, чтобы потенциальная энергия в положении равновесия имела изолированный относительный минимум.*

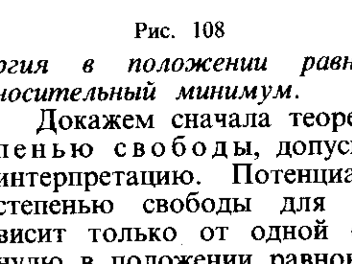

Рис. 108

Докажем сначала теорему для системы с одной степенью свободы, допускающую наглядную геометрическую интерпретацию. Потенциальная энергия системы с одной степенью свободы для стационарного силового поля зависит только от одной обобщенной координаты q, равной нулю в положении равновесия. Примем потенциальную энергию в этом положении равной нулю, т. е. $\Pi(0)=0$. По условию теоремы в положении равновесия потенциальная энергия имеет изолированный относительный минимум, т. е. $\Pi_{min}=\Pi(0)=0$, и функция $\Pi=\Pi(q)$ в малой окрестности $q=0$, принимая только положительные значения, является возрастающей функцией q, т. е. имеет вид, представленный на рис. 108.

Доказательство теоремы состоит из двух частей. Первая часть доказательства содержит выбор значения потенциальной энергии Π^*. Во второй части доказывается существование положительных чисел η_1 и η_2, отличных от нуля, обеспечивающих выполнение условий устойчивости.

Для определения значений Π^* зададим положительное число ε настолько малым, чтобы окрестность его не содержала соседних экстремумов функции $\Pi=\Pi(q)$. Рассмотрим значения функции $\Pi=\Pi(q)$ при $q=\varepsilon$ и $q=-\varepsilon$, т.е. $\Pi(\varepsilon)$ и $\Pi(-\varepsilon)$. Из двух положительных величин выберем наименьшую, например $\Pi(\varepsilon)$, и примем ее за Π^*. Если при движении системы оказалось, что потенциальная энергия $\Pi(q)<\Pi^*$, то из выбора значений Π^* следует, что $q'<q<\varepsilon$, т. е. q обязательно должно удовлетворять условию $|q|<\varepsilon$.

Для доказательства второй части теоремы учтем, что при движении консервативной системы и выполнении других условий теоремы о связях справедлив закон сохранения полной механической энергии

$$T+\Pi=T_0+\Pi_0,$$

где T_0 и Π_0 — значения кинетической и потенциальной энергий в начальный момент. Они зависят от начальных значений q^0 и $\dot{q}^0$, т. е. $\Pi_0=\Pi(q^0)$, $T_0=T(q^0, \dot{q}^0)$.

Кинетическая энергия системы может быть только положительной. Поэтому из закона сохранения механической энергии получаем следующее неравенство для потенциальной энергии:

$$\Pi<T_0+\Pi_0.$$

Это неравенство позволяет установить соответствующие положительные числа η_1 и η_2. Неравенство допускает бесчисленное количество значений для q^0 и $\dot{q}^0$, удовлетворяющих ему. Действительно, неравенства $\Pi_0<\Pi^*/2$ и $T_0<\Pi^*/2$ обеспечивают выполнение рассматриваемого неравенства для потенциальной энергии. Из неравенства $\Pi_0<\Pi^*/2$ получаем $|q^0|<\eta_1\neq0$, а из двух неравенств $T_0<\Pi^*/2$, $|q^0|<\eta_1$ следует $|\dot{q}^0|<\eta_2\neq0$. Подставляя значения $T_0<\Pi^*/2$ и $\Pi_0<\Pi^*/2$ в основное неравенство, получим следующее условие для потенциальной энергии:

$$\Pi<T_0+\Pi_0<\Pi^*,$$

что в соответствии с выбором числовой величины Π^* обеспечивает для обобщенной координаты выполнение условия $|q|<\varepsilon$.

Доказано, что для любого достаточно малого числа $\varepsilon<0$ существуют положительные числа η_1 и η_2, и если $|q^0|<\eta_1$ и $|\dot{q}^0|<\eta_2$, то $|q|<\varepsilon$, т. е. положение равновесия устойчиво.

Для системы с двумя степенями свободы доказательство второй части теоремы почти не изменяется, за исключением того, что $\Pi_0=\Pi(q_1^0, q_2^0)$ и $T_0=T(q_1^0, q_2^0, \dot{q}_1^0, \dot{q}_2^0)$, но это не вносит существенных изменений в последующие рассуждения. Некоторые особенности возникают при выборе величины Π^*.

Для системы с двумя степенями свободы $\Pi=\Pi(q_1, q_2)$. В положении равновесия системы $q_1=q_2=0$ принимаем $\Pi(0, 0)= \; =0$. Следовательно, $\Pi_{min}=\Pi(0, 0)=0$.

Потенциальная энергия $\Pi=\Pi(q_1, q_2)$ в малой окрестности изолированного минимума положительна, и ее зависимость от обобщенных координат имеет форму поверхности, изображенной на рис. 109, *а*.

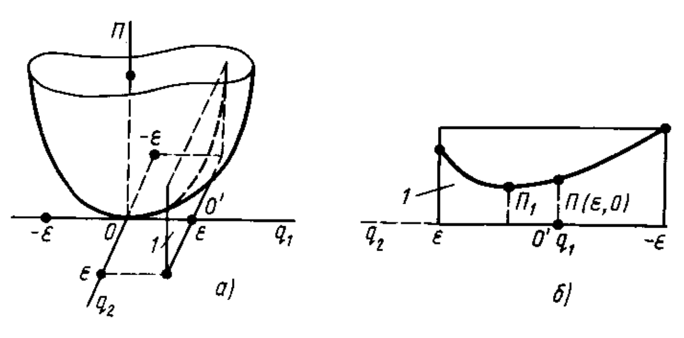

Рис. 109

Выберем $\varepsilon>0$ и рассмотрим значения потенциальной энергии $\Pi=\Pi(\varepsilon, q_2)$, и $\Pi=\Pi(-\varepsilon, q_2)$, где q_2 — любое, удовлетворяющее условию $|q_2|\leqslant\varepsilon$. Зависимость $\Pi=\Pi(\varepsilon, q_2)$ является уравнением линии пересечения плоскости $q_1=\varepsilon$ (плоскость *1*) с поверхностью $\Pi=\Pi(q_1, q_2)$. Аналогично, $\Pi=\Pi(-\varepsilon, q_2)$ есть линия пересечения плоскости $q_1=-\varepsilon$ с той же поверхностью. Из множества значений $\Pi(\varepsilon, q_2)$ и $\Pi(-\varepsilon, q_2)$ (рис. 109, *б*) при изменении q_2 в интервале $|q_2|\leqslant\varepsilon$ выбираем наименьшее Π_1. Затем рассматриваем $\Pi=\Pi(q_1, \varepsilon)$ и $\Pi=\Pi(q_1, -\varepsilon)$. Опять получим в плоскостях $q_2=\varepsilon$ и $q_2=-\varepsilon$ по кривой, аналогичной изображенной на рис. 109, *б*. Из множества этих значений потенциальной энергии выбираем наименьшее Π_2. Из двух положительных величин Π_1 и Π_2 наименьшее принимаем за Π^*.

Из способа выбора значения Π^* следует, что если в какой-то момент движения системы $\Pi(q_1, q_2)<\Pi^*$, то обобщенные координаты удовлетворяют условиям $|q_1|<\varepsilon$ *и* $|q_2|<\varepsilon$.

Рассмотрим доказательство теоремы Лагранжа — Дирихле для системы с n степенями свободы и, следовательно, с $q_1, q_2, ..., q_n$ обобщенными координатами.

Примем в положении равновесия все $q_i=0$ и $\Pi(0, 0, ..., 0)=0$. Тогда $\Pi_{min}=\Pi(0, 0, ..., 0)=0$. Выберем достаточно малое положительное число $\varepsilon>0$, такое, чтобы в ε-окрестности не содержалось других экстремумов функции $\Pi=\Pi(q_1, q_2, ..., q_n)$. Дадим обобщенной координате q_1 значения $q_1=\varepsilon$ и $q_1=-\varepsilon$, т. е. $|q_1|=\varepsilon$, а другие обобщенные координаты при этом удовлетворяют условию $|q_i|\leqslant\varepsilon$. Из всех значений потенциальной энергии в этом случае выбираем наименьшее Π_1. Затем даем q_2 значение $|q_2|=\varepsilon$, а другие при изменении удовлетворяют условию $|q_i|\leqslant\varepsilon$. Наименьшее значение потенциальной энергии при этих условиях обозначим Π_2. Продолжая этот процесс со всеми обобщенными координатами, получим последовательность положительных чисел $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_n$, наименьшее из которых принимаем за Π^*.

Пока при движении системы $\Pi<\Pi^*$, выполняется условие $|q_i|<\varepsilon$ для всех обобщенных координат.

Пусть системе сообщили соответствующие начальные обобщенные координаты и скорости и она движется. При движении консервативной системы, удовлетворяющей связям, указанным в условии теоремы, справедлив закон сохранения механической энергии

$$T+\Pi=T_0+\Pi_0,$$

где $\Pi_0=\Pi(q_1^0, q_2^0, ..., q_n^0)$ и $T_0=T(q_1^0, q_2^0, ..., q_n^0; \dot{q}_1^0, \dot{q}_2^0, ..., \dot{q}_n^0)$, т. е. величины, зависящие от начальных значений обобщенных координат и скоростей. Так как при движении системы $T=\sum_{k=1}^{N}\frac{m_k v_k^2}{2}>0$, то из закона сохранения энергии следует

$$\Pi<T_0+\Pi_0.$$

Это неравенство выполняется, если справедливы, например, два неравенства: $\Pi_0\leqslant\Pi^*/2$ и $T_0\leqslant\Pi^*/2$. Из условий $\Pi_0\leqslant\Pi^*/2$ получим ряд значений q_i^0, удовлетворяющих условию $|q^0|<\eta_1\neq0$, а из условия $T_0\leqslant\Pi^*/2$ и неравенства $|q_i^0|<\eta_1$ — ряд значений $\dot{q}_i^0$, удовлетворяющих условию $|\dot{q}_i^0|<\eta_2\neq0$. Для потенциальной энергии после этого имеем

$$\Pi<T_0+\Pi_0<\Pi^*.$$

Следовательно, в соответствии с выбором Π^* все обобщенные координаты удовлетворяют условию $|q_i|<\varepsilon$.

Итак, существуют такие положительные числа η_1 и η_2, определяющие область начальных значений q_i^0 и $\dot{q}_i^0$, для которых все обобщенные координаты удовлетворяют условию $|q_i|<\varepsilon$, т. е. положение равновесия устойчиво. Теорема Лагранжа — Дирихле полностью доказана.

В некоторых случаях установить неустойчивость равновесия можно на основании теорем Ляпунова.

Приводим эти теоремы без доказательства.

1. Равновесие консервативной системы неустойчиво, если потенциальная энергия системы в положении равновесия не имеет минимума и отсутствие минимума определяется слагаемыми второго порядка малости в разложении потенциальной энергии в ряд по степеням обобщенных координат.

2. Равновесие консервативной системы неустойчиво, если потенциальная энергия системы в положении равновесия имеет максимум и наличие максимума определяется членами наименьшего порядка малости в разложении потенциальной энергии в ряд по степеням обобщенных координат.

§ 2. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Механическая система с одной степенью свободы имеет одну обобщенную координату q, и ее движение описывается одним уравнением Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}=Q. \qquad (1)$$

Обобщенную силу Q можно считать состоящей из трех частей: $Q=Q^П+Q^Ф+Q^В$. Здесь $Q^П$ — обобщенная сила потенциальных сил. Она выражается через потенциальную энергию Π по формуле $Q^П=-\partial\Pi/\partial q$. Потенциальная энергия в общем случае зависит от координат точек системы и, следовательно, от обобщенной координаты q и не зависит от обобщенной скорости $\dot{q}$. Для нестационарного силового поля, а также нестационарных связей потенциальная энергия может зависеть явно еще и от времени.